т.е $A' = B \cdot A \Rightarrow \det A' = \det B \cdot \det B$

$$\underset{\overset{\|}{v(B(a_1)\dots B(a_n))}}{} \qquad \underset{\overset{\|}{v(a_1\dots a_n)}}{}$$

Глава 6. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

§1. Сопряженный оператор.

Пусть V - евклидово пространство (вещ или комплекс)

$A: V \to V$ - линейный оператор.

Определение Отображение $A^*: V \to V$ наз сопряженным к A, если

$$\forall x, y \in V \qquad (Ax, y) = (x, A^* y)$$

<u>примеры</u> 1). $Ax = x \times a$, $a \in \mathbb{R}^3$

$$\forall y \in \mathbb{R}^3 \qquad (Ax, y) = (x \times a, y) = (x, a, y) = (a, y, x) = (a \times y, x) =$$
$$= (x, a \times y) = (x, -y \times a) = (x, -Ay)$$

т.е $A^* = -A$.

2) пр-во функций $C_0^\infty [0, 1]$

$f: [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f \in C_0^\infty$ - бесконечно гладкая, зануляется на гран.

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$$

$$A = \frac{d}{dt} \longrightarrow (Af, g) = (f', g) = \int_0^1 f'(t) g(t)\, dt = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) g'(t)\, dt = -(f, g')$$

т.е $A^* = -\frac{d}{dt}$.

Лемма

сопряженный оператор линеен

Док-во Пусть $y_1, y_2 \in V$

$$(Ax, y_1 + y_2) \underset{\text{по опред}}{=} (x, A^*(y_1 + y_2))$$

С другой стороны

$(Ax, y_1+y_2) = (Ax, y_1) + (Ax, y_2) = (x, A^* y_1) + (x, A^* y_2) = (x, A^* y_1 + A^* y_2)$

т.е $(x, A^*(y_1+y_2)) = (x, A^* y_1 + A^* y_2)$

$\forall x \in V$

$\Rightarrow A^*(y_1+y_2) = A^* y_1 + A^* y_2$

Аналогично:

$$A^*(\alpha y) = \alpha A^* y.$$

Теорема

Для любого линейного оператора $A: V \to V$ существует, и притом единственный, сопряженный оператор.

Док-во. Пусть $e_1 \dots e_n$ – ОНБ

$(Ax, y) = (Ax)^T y = x^T A^T y$

$(x, A^* y) = x^T A^* y$

Определим сопряженный оператор как лин. оператор с матрицей A^T

(в комплексном евклид. пр-ве

$(x, A^* y) = x^T \overline{A^* y}$

$A^* = \overline{A^T}$

единственность

Если $(Ax, y) = (x, By) = (x, Cy)$

$\forall x, y \Rightarrow \forall x, y \quad (x, By - Cy) = 0$

$x := By - Cy \Rightarrow By = Cy \quad \forall y.$

присвоить

Замечание

В произвольном базисе

$$A^* = G^{-1} A^T G \quad (\overline{G^{-1} A^T G})$$

Действительно, в

$(Ax, y) = (Ax)^T G \bar{y} = x^T A^T G \bar{y}$

$(x, A^* y) = x^T G \overline{A^* y} = x^T G \overline{A^*} \bar{y} \Rightarrow A^* = \overline{G^{-1} A^T G}$

Свойства операции сопряжения

1. $(A^*)^* = A$
2. $(AB)^* = B^* A^*$
3. $(A+B)^* = A$
4. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$
5. $E^* = E$

Докажем, на

$(Ax, y) = (x, A^* y) \Rightarrow (A^* y, x) = (y, Ax)$

$x \leftrightarrow y$

$(A^* x, y) = (x, Ay)$

$(\overline{x}, (A^*)^* y)$

<u>Утверждение</u>

$rk A = rk A^*$

Действительно, в ОНБ

$(A^*) = (\overline{A}^T)$ - эти преобразования не меняют ранг матрицы ранг лин. отображения.

Ядра и образы операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$

Теорема

Для линейного оператора $\mathcal{A}: V \to V$

$\ker \mathcal{A} = (im\ \mathcal{A}^*)^\perp$

$\ker A^* = (im\ \mathcal{A})^\perp$

Док-во.

Пусть $x \in \ker A$, т.е $Ax = 0$

Пусть $y \in im\ \mathcal{A}^*$, т.е $y = \mathcal{A}^* y_1$

Имеем: $(x, y) = (x, A^* y_1) = (Ax, y_1) = 0$

т.е $\ker A \perp im\ \mathcal{A}^* \Rightarrow$ т.е $\ker \mathcal{A} \subset (im\ \mathcal{A}^*)^\perp$

по теореме о ранге и дефекте $\Rightarrow$

$\dim \ker \mathcal{A} = \dim V - \underset{rk A}{\dim Im A} = \dim V - \underset{rk A^*}{\dim Im A^*} = \dim (Im A^*)^\perp$

т.к $V = \operatorname{Im} A^* \oplus (\operatorname{Im} A^*)^\perp$

Следовательно, $\ker A = (\operatorname{im} A^*)^\perp$

Следствие $V = \ker A \oplus \operatorname{im} A^* = \ker A^* \oplus \operatorname{im} A$

Рассмотрим СЛУ $AX = B$ $A^* Y = O$. (с.о)

Теорема (Альтернатива Фредгольма)

Либо уравнение $AX = B$ имеет решение при любой правой части либо сопряженное однородное уравнение имеет ненулевое решение

Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям сопряженного уравнения,

$B \perp \ker A^*$

Док-во

Пусть уравнение $AX = B$ имеет решение $\forall B$,

т.е $B \in \operatorname{im} A$, т.е $\operatorname{im} A = V \Rightarrow \ker A^* = O$, т.к. $V = \operatorname{im} A \oplus \ker A^*$

Пусть уравнение $A^* Y = O$ имеет ненулевое решение Y_0

т.е $Y_0 \in \ker A^* \Rightarrow Y_0 \notin \operatorname{im} A$.

Пусть для некоторого B уравнение $AX = B$ имеет решение

т.е $B \in \operatorname{im} A \Rightarrow B \perp \ker A^*$

пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

при каких B разрешима СЛУ $AX = B$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\ker A^* = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};\ x_1 + x_2 = 0. \right\}$ $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ B должна быть ортогональна $\ker A^*$

$b_1 - b_2 = 0$, т.е $B = \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix}$

§2. Унитарные (ортогональные) операторы. Определение и свойства.

Определение. Лин. оператор $\mathcal{U}$ в комплексном евкл пр-ве (вещественном евкл. пр-ве) наз унитарным (ортогональным), если

$$\mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{U}^* = E$$

Для унитарного оператора: $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$; $|\det \mathcal{U}| = 1$.

строки (столбцы) $u_i u_j^T = \delta_{ij}$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1; & i=j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$

Определение Лин. оператор наз. изометрическим, если он сохраняет скалярное произведение сохр метрику

т.е $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y) \quad \forall x, y \in V$

Лемма (критерий унитарности)

След условия равносильны
1. оператор $\mathcal{U}$ изометричен
2. оператор $\mathcal{U}$ сохр длины $|\mathcal{U}x| = |x|$
3. $\mathcal{U}$ унитарен
4. $\mathcal{U}$ переводит ОНБ в ОНБ.

Док-во.

1) => 2) $\quad |\mathcal{U}x|^2 = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, x) = |x|^2$

2) => 1) $\quad (x, y) = \frac{1}{2}(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$ вещ.

$$(x, y) = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2) \text{ компл}$$

1) => 3) $\quad$ В ОНБ $\quad (x, y) = x^T \bar{y}$

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x)^T (\overline{\mathcal{U}y}) = x^T \mathcal{U}^T \bar{\mathcal{U}} \bar{y} = x^T \bar{y} \Rightarrow \mathcal{U}^T \bar{\mathcal{U}} = E \Rightarrow \mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$$

3) => 1) аналогично

$$\bar{\mathcal{U}}^T \mathcal{U} = \mathcal{U} \bar{\mathcal{U}}^T = E \Rightarrow (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = x^T \mathcal{U}^T \bar{\mathcal{U}} \bar{y} = (x, y)$$

1) => 4) $\quad$ Если $e_1 \dots e_n$ – ОНБ, то

$$(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow \mathcal{U}e_1 \dots \mathcal{U}e_n \text{ – тоже ОНБ}$$

4) => 1) Если $e_1 \dots e_n$ – ОНБ, то

$\mathcal{U}e_1 \dots \mathcal{U}e_n$ – тоже ОНБ.

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = \mathcal{U}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n), \mathcal{U}(y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) =$$

$$= (x_1 \mathcal{U}e_1 + \dots + x_n \mathcal{U}e_n ; y_1 \mathcal{U}e_1 + \dots + y_n \mathcal{U}e_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j \underbrace{(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_j)}_{\delta_{ij}} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \overline{y}_j = (x, y)$$

Замечание. Изометрическое пр-во сохраняет углы

§3 Канонический вид изометрий.

Лемма 1

Собственные значения унитарного (ортогонального) оператора по модулю равны 1

Собственные векторы, отвечающие разным собств. значениям ортогональны.

Док-во.

Пусть $\mathcal{U}$ – унитарный (ортог) оператор.
x – собств. вектор для собств. знач – λ

Тогда

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\overline{\lambda}(x, x)$$

С другой стороны $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (\mathcal{U}^* \mathcal{U}x, x) = (x, x)$

Если $\mathcal{U}x = \lambda x$, $\mathcal{U}y = \mu y$; $\lambda \neq \mu$; $x \neq 0$; $y \neq 0$, то

$$(x, y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (\lambda x, \mu y) = \lambda\overline{\mu}(x, y)$$

Но $\lambda\overline{\mu} \neq 1$

$$|\lambda| = |\mu| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\varphi}, \mu = e^{i\psi}$$

$$\lambda\overline{\mu} = e^{i\varphi} e^{-i\psi} = 1 \Rightarrow \varphi = \psi \Rightarrow \lambda = \mu$$

Поэтому $(x, y) = 0$.

Лемма 2

Пусть $V_0 \subset V$ – инвариантное подпр-во унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}: V \to V$

Тогда ортогональное дополнение $V_0^\perp$ также инвариантно отн. $\mathcal{U}$

Док-во.

$$V_0^\perp = \{ v \in V \mid (x, v) = 0 \quad \forall x \in V_0 \}$$

Ограничение оператора $\mathcal{U}$ на V_0

$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}|_{V_0}$ – также изометрия
(сохр длины на V => сохр длины на V_0)

т.к $\det \mathcal{U}_1 \neq 0$, то произвольный вектор $x \in V_0$ можно записать в виде $x = \mathcal{U}x_1$, где $x_1 \in V_0$

Имеем, $(x, \mathcal{U}v) = (\mathcal{U}x_1, \mathcal{U}v) = (\underset{\in V_0}{x_1}, \underset{\in V_0^\perp}{v}) = 0$

т.е $\mathcal{U}v \in V_0^\perp$ вместе с $v \in V_0^\perp$

Теорема (о каноническом виде матрицы унитарного оператора)

Каждый унитарный оператор диагонализируем

Существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора имеет диагональный вид

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & & & \\ & e^{i\varphi_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n} \end{pmatrix} \quad |\lambda_i| = 1.$$

<u>матричная формулировка</u>

Любая унитарная матрица унитарно подобна диагональной, у которой все диагональные элементы по модулю равны 1.

$$\mathcal{U} = V^{-1} D V, \quad V \text{ - унитарное}$$

Док-во

Пусть λ_1 - собств. значение; e_1 - собств. вектор $|e_1| = 1$

Подпространство $V_1 = \langle e_1 \rangle^\perp$ (подпространство $\langle e_1 \rangle$ - инв. отн $\mathcal{U}$) размерности $n-1$ инвариантно относительно $\mathcal{U}$ и т.д. $\left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \hline & \mathcal{U}/_{V_1} \end{array}\right)$

Канонический вид матрицы ортогонального оператора
Теорема Эйлера

У ортогональной матрицы может не быть веществ. собст. зн.

$$OO^T = E \Rightarrow (\det O) = 1$$

Определение Ортогональное преобразование называется собственным, если $\det O = 1$

несобственным, если $\det O = -1$.

а) <u>одномерный случай $\dim V = 1$.</u>

$\dim V = 1$; $\forall x \quad Ox = \lambda x$; $\lambda = \pm 1$.

б) <u>двумерный случай $\dim V = 2$</u>

Пусть e_1, e_2 – ОНБ. V

$O = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – матрица ортогонального преобразования в базисе $e_1\, e_2$

① $ad - bc = 1$.

Тогда $O^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

С другой стороны, $O^{-1} = O^{T} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

т.е $O = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$

т.к. $\det O = a^2 + c^2 = 1$, то $\exists \varphi \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$ |

т.е всякое собственное ортогонального преобразования двумерного пространства имеет в произвольной ОНБ матрицу вида

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ – поворот на угол φ.

② $ad - bc = -1$.

Характеристическое уравнение: $\det(O - \lambda E) = \lambda^2 - (a+d)\lambda - 1 = 0$.

Имеет вещественные корни $\lambda_1\, \lambda_2$

т.к O – ортогональная, то $\lambda_{12} = \pm 1$

Пусть $e_1\, e_2$ – собств векторы, отвечающие $\lambda_1\, \lambda_2$, $|e_1| = |e_2| = 1$ – они ортогональны

т.е в базисе $e_1\, e_2$ – матрица O имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(зеркального отражение отн. одной из координатных осей)

Теорема (о каноническом виде матрицы ортогон. оператора)

Для любого ортогонального оператора в евклид пространстве существует ОНБ, в котором матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots\, 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots\, -1 & & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix}} & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Лемма

У любого лин. оператора A в веществ. пр-ве существует одномерное или двумерное инвариантное подпр-во

Док-во. Если у A есть веществ. собств. значения $\lambda_0 \in \mathbb{R}$
x_0 – собств. вектор, отвечающий λ_0

то
$$V(\lambda_0) = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \text{ – одномерное инвариантное подпр-во}$$
$$(A(\alpha x_0) = \alpha A(x_0) = \alpha \lambda_0 x_0 = \alpha_1 x_0)$$

Если веществ собств. знач. нет,
то есть собств. знач.
$$\lambda_0 = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$$
$\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ – тоже корень хар. многочлена
(т.к. его коэф. вещ.)

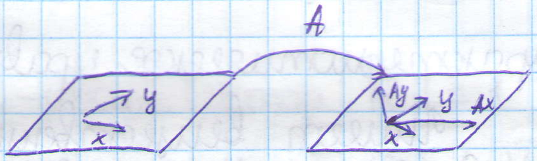
Пусть $e = x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ – собств. вектор, отвечающий собств. знач. λ_0

$x = (x_1 \dots y_n)$ $\quad y = (y_1 \dots y_n)$

Тогда $A(x+iy) = (\alpha + i\beta)(x+iy)$

или
$$\begin{cases} Ax = \alpha x - \beta y \\ Ay = \beta x + \alpha y \end{cases}$$
– двумерное подпр-во, порожденное векторами x и y инвариантно отн A

Матрица A в базисе x, y
$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$



Пусть g – собств знач $\bar{\lambda}_0$;
$$Ag = \bar{\lambda}_0 g$$
$g = \bar{e}$, т.к $Ae = \lambda_0 e \Rightarrow \overline{Ae} = \overline{\lambda_0 e} \Rightarrow A\bar{e} = \bar{\lambda}_0 \bar{e}$

тогда $x = \frac{e+g}{2}$; $y = \frac{e-g}{2i}$; x, y – лин. независимы

Замечание

Для ортогонального оператора векторы e и g ортогональны, т.как собств векторы, отвечающ разным собств. знач.

Поэтому
$$(x+iy; x-iy) = |x|^2 - |y^2| + 2i(x,y| = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = |y| \\ (x,y) = 0. \end{cases}$$

Док-во теоремы. Для $\dim V = 1, 2$ доказали.
Пусть $\dim V \geq 3$

т.к. $\mathcal{U}$ – лин оператор в веществ. пр-ве, то у него всегда существ. одномерное или двумерное инвариантное подпр-во

$V = V_0 \oplus V_0^{\perp}$

Выберем в V_0 ортонормированный базис

обозн. V_1 – также инвариантно $\mathcal{U}$

Имеем: $\dim V_0 = 1$ $\qquad$ $\dim V_0 = 2$

$$\mathcal{U} = \left(\begin{array}{c|cc} \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & * \\ 0 & & \end{array}\right) \qquad \mathcal{U} = \left(\begin{array}{cc|cc} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & * \\ 0 & 0 & & \end{array}\right)$$

Применим к оператору $\mathcal{U}_1$ те же рассуждения $V_1 = V_2 \oplus V_2^{\perp}$ и т.д.

За конечное число шагов приходим к разложению V в прямую сумму одно и двумерных попарно ортогональных, объединим их в ОНБ

простое вращение $\qquad$ простое отражение

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \cos\varphi & -\sin\varphi & \\ & & & \sin\varphi & \cos\varphi & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{– поворот в двумерной плоскости} \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

меняет направление всех векторов прямой на противоположн. и не меняет остальных

<u>Геометрическая формулировка теоремы</u>

Всякое ортогональное преобразование может быть представлено в виде суперпозиции конечного числа простых вращений и простых отражений

Следствие (теорема Эйлера)

В трехмерном евклидовом пр-ве любое ортогональное преобразование, не меняющее ориентации (т.е. $f \in SO(3)$) является вращением отн. некоторой оси.

Док-во

Степень хар многочлена = 3 => обязательно есть вещественный корень.

Если он один, то это 1.

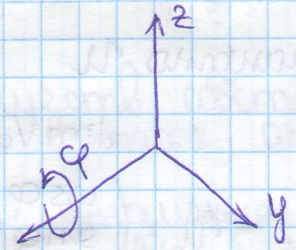
Если их > 1, то это (1, 1, 1) или (1, −1, −1)

т.е. собств. значение = 1 есть всегда

Соответств. собственное подпр-во является осью вращения а в ортогональной плоскости происходит вращение на некоторый угол

пример Вращение вокруг оси Ox

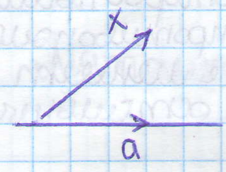
$$P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



§4. Самосопряженные операторы.

Определение. Линейный оператор $A: V \to V$ наз. самосопряженным, если
$$A^* = A.$$
$$\forall x, y \in V \qquad (Ax, y) = (x, Ay)$$

пример проектирование на ось вдоль $\vec{a}$



$$P(x) = pr_a x = \frac{(x,a)}{(a,a)} \cdot a$$

$$(Px, y) = \left(\frac{(x,a)}{(a,a)} a, y\right) = \frac{(x,a)}{(a,a)} (a, y) = \left(x, \frac{(y,a)}{(a,a)} a\right) = (x, Py)$$

$\Rightarrow P^* = P$

Теорема

Оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда в произвольном ортонормированном базисе его матрица симметрична (эрмитово симметрична)

$A^T = A$ – в случае вещ. пр-ва ($\bar{A}^T = A$ – в комплекс. евклид пр-ве)

Док-во. т.к в ОНБ $A^* = A^T$ $(A^* = \bar{A}^T)$

Теорема (Канонический вид самосопряженного оператора)

В подходящем ОНБ матрица самосопряженного оператора имеет диагональный вид с вещественными числами на главной диагонали.

Лемма 1.

Собственные значения самосопряженного оператора вещест

Собственные векторы, отвечающие разным собств. знач., ортогональны

Док-во Комплексный случай

Если $Ax = \lambda x$, то $\left.\begin{array}{l}(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x)\\ (Ax; x) = (x, Ax) = \bar\lambda (x; x)\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \bar\lambda$

Вещественный случай

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексное собств. знач.

Построим двумерное инвариантное подпространство.

$\left.\begin{array}{l}Ax = \alpha x + \beta y\\ Ay = \beta x + \alpha y\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(Ax; y) = \alpha (x, y) - \beta (y, y)\\ (x, Ay) = \beta (x, x) + \alpha (x, y)\end{array}\right\} \ominus$

$\beta (|x|^2 + |y|^2) = 0 \Rightarrow \beta = 0.$

Если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $\lambda \neq \mu$; $\lambda, \mu \in R$

$\lambda (x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu (x, y) \Rightarrow (x, y) = 0$

Лемма 2

Пусть A самосопряженный оператор, V_0 - инвариантное подпр-во

Тогда $V_0^\perp$ - так же инвариантное подпр-во

Док-во

Если $x \in V_0$, $y \in V_0^\perp$, то $Ax \in V_0$ и $(Ax, y) = 0$.

но $(Ax, y) = (x, Ay)$, т.е $(x, Ay) = 0$

вектор Ay ортогонален любому вектору из V_0. $(x \in V_0)$

т.е $A(V_0^\perp) \subset V_0^\perp$

Док-во теоремы.

По лемме 1 у линейного оператора A имеется собств. знач. $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, собств. вектор e_1 $(|e_1| = 1)$

$V_0 := \langle e_1 \rangle$

$V_1 = V_0^\perp = \langle e_1 \rangle^\perp$

V_0 и V_1 инвариантны относительно A

$V = V_0 \oplus V_1$.

Рассмотрим $A|_{V_1}$ - самосопряженный (ограниченный) (обл опред V_1)

Найдем собств. знач. $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, собств. вектор e_2 $(|e_2| = 1)$

Найдем n взаимно ортогональных векторов e_i ($|e_i|=1$)

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \text{ в базисе } e_1 \dots e_n$$

§5. Канонический вид квадратичных форм. Приведение квадратичных форм к главным осям. Приведение пары форм к диагональному виду.

$Q(x)$ – вещественная квадратичная форма

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij} x_i x_j$$

$A=A^T$ – симметричная матрица, $Q(x)=(Ax,x)$

В матричной форме: $Q(x)=x^T A x$.

<u>пример</u> $Q(x)=x_1^2+4x_1x_3$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix} \qquad Q(x)=(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_1^2+4x_1x_3$$

Преобразования квадратичных форм.

Пусть e' – новый базис, C – матрица перехода

$$[e_1' \dots e_n'] = [e_1 \dots e_n]\, C$$

Тогда координаты вектора: $x = Cx'$

$$Q(x)=x^T A x = (Cx')^T A (Cx') = x'^T C^T A C x', \text{ т.е } A'=C^T A C$$

Теорема (о приведении квадр. формы к главным осям)

Любая вещественная квадратичная форма ортогональным преобразованием $x=Qy$ может быть приведена к виду:

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$$

(отличие от т. Лагранжа – приведение к каноническому виду не произвольным, а ортогональным преобразованием λ_i – определены однозначно)

Док-во Квадр. форме однозначно сопоставляются матрица квадр. формы

Она симметрична

По теореме о каноническом виде $\exists$ ОНБ из собств. вект.
в которой матрица имеет диагональный вид

$$D = Q^T A Q = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Q – ортогон, т.к переходим из ОНБ в ОНБ
$X = QY$.

Приведение пары форм к диагональному виду.

<u>пример</u> Возьмем 2 квадр. формы

$$q(x) = x_1^2 - x_2^2 \qquad r(x) = x_1 x_2$$

нельзя одновременно привести к диагональному (канон) виду

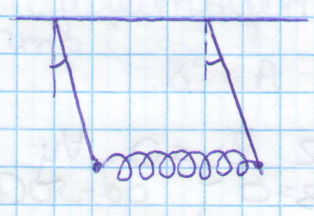
Теорема

Пусть $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – две квадратичные формы
причем $Q_1(x)$ – положительно определена
$Q_1(x) > 0$ для $x \neq 0$.
Тогда существует базис, в котором обе формы приводятся к каноническому виду.

$$Q_1 = y_1^2 + \dots + y_n^2 \qquad Q_2 = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Док-во.
Пусть A матрица квадр. формы Q_1
Определим скалярное произведение $(x, y)_1 := (Ax, y)$
Это возможно, т.к все свойства скалярного произв. выполняются
Пр-во V – евклидово, со скалярным произведением $(\ ,\ )_1$
Найдется ОНБ (в смысле скалярного произв. $(\ ,\ )_1$) $e_1 \dots e_n$
в котором $Q_2(x)$ принимает канонический вид
В этом же базисе $\underbrace{(x, x)_1}_{\Sigma x_i^2 =} = (Ax, x) = Q_1(x)$

<u>пример</u> Кинетическая и потенциальная энергия механической системы с n степенями свободы.



q_i – обобщенные координаты
$\dot{q}_i$ – скорости
Лагранжиан $L(q, \dot{q}) = T - U$

Кинет. энергия $T = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q})$ $\quad q \in \mathbb{R}^n$ – полож. опред. форма

Потенциальная энергия $\mathcal{U} = \frac{1}{2}(Bq, q) \quad q \in \mathbb{R}^n$

Можно привести к главным осям заменой $Q = Cq$; $Q = (Q_1, \dots Q_n)$

В новых координатах: $T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{Q}_i^2$, $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Q_i^2$

В координатах Q система уравнений Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$

продолж

распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{Q}_i = -\lambda_i Q_i$$

т. Система, совершающая малые колебания, есть прямое произвед n одномерных систем, соверш. малые колебания

§6. Положительные операторы. Корень из оператора

Лемма

Линейный оператор A в унитарном пространстве эрмитов тогда и только тогда, когда

$$(Ax, x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$$

Док-во.

необходимость.

если A эрмитов, то $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax)$ $\quad (x, y) = \overline{(y, x)}$

т.е $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} \Rightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$

достаточность

пусть $(Ax, x) \in \mathbb{R}$, тогда $(Ax, x) = (x, Ax)$

$(Ax, x) = (x, A^*x)$

т.е $(x; (A - A^*)x) = 0 \quad \forall x \in V$

Упражнение

если в унитарном пр-ве $\forall x \in V \ (Bx, x) = 0$ то $B = 0$.

Док-во

$(B(y+z), y+z) = 0$, т.е $(By, y) + (Bz, y) + (By, z) + (Bz, z) = 0$

$(B(iy+z); iy+z) = 0 \qquad (By, y) - i(Bz, y) + i(By, z) + (Bz, z) = 0$

$$\begin{cases} (Bz, y) + (By, z) = 0 \\ -i(Bz; y) + i(By, z) = 0 \end{cases}$$

$(By, z) = 0 \quad \forall y, z \in V \qquad z := By$

$(By, By) = 0$, т.е $By = 0 \quad \forall y$

$B = 0$

Эта теорема позволяет для самосопряженного оператора говорить о знаке шара (Ax, x)

Определение Самосопряженный оператор наз. положительно (отрицательно) определенным, если

$$(Ax, x) > 0, \ \forall x \neq 0$$

$$((Ax, x) < 0, \ \forall x \neq 0)$$

неотрицательно определенным, если

$$(Ax, x) \geq 0.$$

Теорема

Самосопряженный оператор положительно определен (соотв $A \geq 0, A < 0; A \leq 0$) тогда и только тогда, когда все собственные знач. $\lambda > 0$ ($\lambda \geq 0, \lambda < 0, \lambda \leq 0$)

Док-во Докажем для $A > 0$

"$\Rightarrow$" если $A > 0$, то $(Ax, x) > 0 \ \forall x \neq 0$
В частности, для собств. векторов x

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda (x, x) > 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

"$\Leftarrow$" если A - самосопряженный оператор, то сущ. ОНБ из с. в. $e_1 \dots e_n$, причем $\lambda_i > 0$

Тогда произвольный вектор $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$$(Ax, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 > 0$$

Следствие. Если $A > 0$ ($A < 0$), то оператор A обратим. т.к.

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n \neq 0.$$

Теорема (корень из оператора)

Пусть $A \geq 0$ ($A > 0$)
Существует единственный оператор $B \geq 0$ ($B > 0$) такой, что $B^2 = A$ ($B = \sqrt{A}$ - положит. квадр. корень из A)

Док-во

"Существование"

Построим оператор B.

Пусть $e_1 \dots e_n$ – ОНБ из собств. вект. A

$$Ae_i = \lambda_i e_i \,;\quad \lambda_i \geq 0 \ (\lambda_i > 0)$$

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Положим $\quad B_e = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$

$B \geq 0$ $(B > 0)$, самосопряжен, $B^2 e_i = \lambda_i e_i = Ae_i$; т.е $B^2 = A$.

„Единственность"

Пусть сущ. другой оператор C, $C \geq 0$ такой, что $C^2 = A$

Тогда сущ. ОНБ $e_1 \dots e_n$ из собств. вект. оператора C

Если $Cf_i = \mu_i f_i$, то $Af_i = C^2 f_i = \mu_i^2 f_i$

Значит, $\mu_1^2 \dots \mu_n^2$ – собств. знач. оператора A $\Rightarrow$ совпадают с $\lambda_1 \dots \lambda_n$ (возможно, после перенумер)

f_i – собств. вект. оператора A

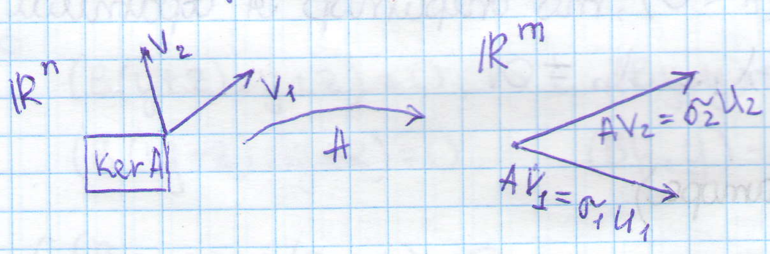
$$f_i = e_i$$

<u>Замечание</u>. Ясно, что можно извлечь корень любой степени $B = \sqrt[n]{A}$.

§7. Сингулярное и полярное разложение.

$$A = U \Sigma V^T$$

Σ – диагональная, U, V – ортогональные



$$A\,[V_1 \dots V_r \mid \underbrace{V_{r+1} \dots V_n}_{\operatorname{Ker} A}] = [U_1 \dots U_r \mid U_{r+1} \dots U_n] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$AV = U\Sigma$$

$$\Rightarrow A = U \Sigma V^{-1} = U \Sigma V^T$$

A^TA - симметричная, положит. определенная

$A^TA = V\Sigma^T \underbrace{\mathcal{U}^T\mathcal{U}}_{E}\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T$

V - собств. вект. для A^TA

$A^TA = \mathcal{U}\Sigma \underbrace{V^TV}_{E}\Sigma^T\mathcal{U}^T = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{U}^T$

$\mathcal{U}$ - собств. вект для A^TA.

пример $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 7 \\ 7 & 25 \end{pmatrix}$ собств. знач $\lambda_1 = 32$, собств. в $v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 18$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt2 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{32} & 0 \\ 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & 1/\sqrt2 \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}$$

пункт 1. Сингулярное разложение и сингулярные пара базисов.

Пусть $V, \mathcal{U}$ - два унитарных (или веществ) евклидовых пр-ва $\dim V = n$, $\dim \mathcal{U} = m$

Теорема.

Для любого лин оператора $A: V \to \mathcal{U}$ ранга r существуют положительные числа

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0.$$

Ортонормированные базисы: $V = (V_1 \ldots V_n)$ пр-ва V

$\mathcal{U} = (u_1 \ldots u_m)$ пр-ва $\mathcal{U}$

такие, что

$$AV_k = \begin{cases} \sigma_k u_k ; & k = 1 \ldots r \\ 0 , & k = r+1 \ldots n \end{cases}$$

$$A^* u_k = \begin{cases} \sigma_k V_k ; & k = 1 \ldots r \\ 0 ; & k = r+1 \ldots m \end{cases}$$

Матричная формулировка SVD (singular value decomposition)

Для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ ($\mathbb{R}^{m\times n}$) ранга r существ. положительные числа

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$

2 унитарные (ортогональные) матрицы

$\mathcal{U} \in \mathbb{C}^{m\times n} (\mathbb{R}^{m\times n})$ и $V \in \mathbb{C}^{m\times n} (\mathbb{R}^{m\times n})$

такие что

$A = \mathcal{U}\Sigma V^* \quad (A = \mathcal{U}\Sigma V^T)$; $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$ – диагональная матр $m\times n$

$$A = \underset{m\times m}{\mathcal{U}} \underset{m\times n}{\begin{pmatrix} D_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{n\times n}{V^*}$$

Док-во.

1. Рассмотрим операторы A^*A и AA^*

Заметим, что

а) $A : \underset{x}{V} \to \underset{y}{\mathcal{U}}$ $\quad (Ax, y) = (x, A^*y) \Rightarrow A^* : \mathcal{U} \to V$ (действ. навстречу A)

$A^*A \in \mathcal{L}(V, V)$ – лин. оператор

$AA^* \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$

б) A^*A и AA^* – самосопряженные, т.к. $(A^*A)^* = A^*A$
$(AA)^* = AA^*$

в) $A^*A \geqslant 0$, $AA^* \geqslant 0$, т.к. $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geqslant 0$
$(AA^*x, x) = (A^*x, A^*x) \geqslant 0$.

2. Для оператора A^*A сущ. ОНБ из собств. вект., причем собств. знач. неотрицат.

Пусть $\mathrm{rk}\, A^*A = t$ и векторы $v_1 \dots v_n$ пронумерованы так, что первые t собств. знач $\sigma_1^2 \dots \sigma_t^2 \neq 0$

причем $\sigma_1^2 \geqslant \sigma_2^2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_t^2$, а $\sigma_{t+1}^2 = \dots = \sigma_n^2 = 0$, т.е.

$$\begin{cases} \sigma_k^2 > 0\,; & k \leqslant t \\ \sigma_k^2 = 0\,; & k > t \end{cases} \qquad \begin{cases} A^*A v_k = \sigma_k^2 v_k\,; & k \leqslant t \\ A^*A v_k = 0\,; & k > t \end{cases}$$

3. Рассмотрим систему векторов $Av_1, Av_2 \dots Av_n$

Заметим, что

а) $Av_k \in \mathcal{U}$

б) $(Av_k, Av_j) = (A^*Av_k, v_j) = \sigma_k^2 (v_k, v_j) = \begin{cases} \sigma_k^2\,; & j = k \\ 0\,; & j \neq k \end{cases}$

т.е $Av_1 \dots Av_t$ – ненулевые попарно ортогон. векторы из $\mathcal{U}$
$Av_k \neq 0$, $k > t$

Таким образом, $Av_1 \dots Av_t$ образуют базис $\mathrm{im}\, A \Rightarrow t = r$

Пусть $\sigma_k = \sqrt{\sigma_k^2}$ $k=1\ldots n$, тогда $\sigma_k > 0$ $k=1\ldots r$
$|Av_k| = \sigma_k$

Обозначим $u_k = \frac{1}{\sigma_k} Av_k$, $k = 1\ldots r$

Имеем $\begin{cases} Av_k = \sigma_k u_k, & k \leq r \\ Av_k = 0 \end{cases}$

Векторы $u_1 \ldots u_r$ образуют ортонормированную систему.

Дополним их до ОНБ $\mathcal{U}$ $u_1 \ldots u_r, u_{r+1} \ldots u_m$

Векторы $u_1 \ldots u_m$ являются собств. вект. оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, отвечающие собств. знач $\sigma_1^2 \ldots \sigma_r^2, 0 \ldots 0$, т.к.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^* u_k = \mathcal{A}\mathcal{A}^*\left(\frac{1}{\sigma_k} Av_k\right) = \frac{1}{\sigma_k}\mathcal{A}(\underbrace{\mathcal{A}^*Av_k}_{\sigma_k^2 v_k}) = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k} Av_k = \sigma_k u_k$$

т.к. $(\operatorname{im}\mathcal{A})^\perp = \ker \mathcal{A}^* \Rightarrow \mathcal{A}^* u_j = 0$; $j \geq r$

4. Таким образом, построены ОНБ V и $\mathcal{U}$

$$A_{uv} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \mathcal{A}^*_{vu} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times m}$$

Следствие 1.
$r = rk A = rk \mathcal{A}^* = rk \mathcal{A}^*\mathcal{A} = rk \mathcal{A}\mathcal{A}^*$

Следствие 2.
Ненулевые собств. знач операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ совпадают

Следствие 3
$\operatorname{im} A = \langle u_1 \ldots u_r \rangle$ $\operatorname{im} \mathcal{A}^* = \langle v_1 \ldots v_n \rangle$
$\ker A = \langle v_{r+1} \ldots v_n \rangle$ $\ker \mathcal{A}^* = \langle u_{r+1} \ldots u_n \rangle$

Числа σ_i (арифметический квадр. корни из общих с.з опер AA^*, A^*A) наз. сингулярными числами оператора A

Векторы $v_1 \ldots v_n$ наз. правыми сингулярными векторами оператора A

Векторы $u_1 \ldots u_n$ наз. левыми.

пункт 2. Полярное разложение

аналогия: $z = re^{i\varphi}$

Теорема.
Произвольный лин. оператор может быть представлен в виде
$A = P\mathcal{U}$ $(A = \mathcal{U}, P_1)$

произведения неотрицательного оператора P и унитарного (ортогонального) оператора $\mathcal{U}$.

При этом оператор P определен однозначно, а если A обратим, то $\mathcal{U}$ определен однозначно

Док-во.

Пусть $e = (e_1 \ldots e_n)$ и $f = (f_1 \ldots f_n)$ - сингулярная пара базисов для A

Положим $\begin{cases} \mathcal{U} e_k = f_k \\ P f_k = \sigma_k f_k \end{cases}$

Тогда $\mathcal{U}$ - унитарный (ортог), т.к. переводит ОНБ в ОНБ
$P \geqslant 0$

При этом $A = P\mathcal{U}$, т.к $Ae_k = P(\mathcal{U}e_k) = Pf_k = \sigma_k f_k$

$$A = \mathcal{U}_1 \Sigma_1 V^* = \underbrace{(\mathcal{U}_1 \Sigma \mathcal{U}_1^*)}_{\text{соотв } \mathcal{U}} \underbrace{\mathcal{U} V^*}_{P}$$

„единственность"

Пусть $A = P\mathcal{U}$ - полярное разложение, тогда
$A^* = \mathcal{U}^* P^*$, т.е $P = \sqrt{AA^*}$, кот. сущ. и определен однозначно

Если A обратим, то A^*A также обратим, поэтому
$\sigma_k \neq 0 \Rightarrow$ обратим $P \Rightarrow$ тогда $\mathcal{U} = P^{-1}A$

Глава 7. Тензоры

§1. Индексные обозначение.

<u>Объекты</u> 3 независимые переменных x, y, z
Можно обозначить одной, различать по индексу $x_1 x_2 x_3$
или более компактно x_r; $r = 1, 2, 3$
или x^r, $r = 1, 2, 3$
(не путать с возведением в степень

Определение Объекты, кот зависят только от одного индекса, наз. объектами первого порядка

$x_1 x_2 x_3 / x^1 x^2 x^3$ - компаненты объекта

Определение Объекты второго порядка зависят от двух индексов
Индексы могут быть верхние и нижние $\Rightarrow$